

Tentative date pour examen blanc : Lundi 28 avr 1 8h - 10h
→ Quid des midterms ?

Proposition 2.2.

Propriétés du produit scalaire :

- (i) (Définie positive) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x, x \rangle \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.
- (ii) (Symétrie) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
- (iii) (Bilinéarité) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$.

Propriétés de la norme :

- (iv) (Positivité) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.
- (v) (Homogénéité absolue) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
- (vi) (Inégalité du triangle) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- (vii) (Inégalité du triangle inverse) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|x - y\| \geq ||x\| - \|y\||$.
- (viii) (Identité du parallélogramme) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

Propriétés de la distance :

- (ix) (Positivité) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, d(x, y) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = y$.
- (x) (Symétrie) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, d(x, y) = d(y, x)$.
- (xi) (Inégalité du triangle) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.
- (xii) (Inégalité du triangle inverse) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, d(x, z) \geq |d(x, y) - d(y, z)|$.

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

Propriétés supplémentaires:

(xiii) (Inégalité de Cauchy - Schwarz) $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot |\cos(\angle(x, y))|$
 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

(xiv) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall 1 \leq i \leq n, \quad |x_i| \leq \|x\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$
" $(x_1, \dots, x_n)$

Définition 2.3 (Boule)

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad r > 0$. On définit:

(i) la boule (ouverte) centrée en a de rayon r par

$$\begin{aligned} B(a, r) &= \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 < r^2\right\} \end{aligned}$$



(ii) la boule fermée centrée en a de rayon r par

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) \leq r\}$$



$$= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 \leq r^2\right\}$$

Si $n=1$, $B(x_0, \delta) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

Définition 2.4 (ouvert, fermé)

Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble. On dit que

(i) E est ouvert si $\forall x \in E, \exists r > 0$ tq $B(x, r) \subseteq E$

(ii) E est fermé si $\mathbb{R}^n \setminus E$ est ouvert.

Remarque 2.5

(i) Si $n=1$ la définition ci-dessus coïncide avec la définition d'ouvert une en analyse $\mathbb{I}_-$.

(iii)  Si un ensemble n'est pas ouvert, il n'est pas nécessairement fermé et vice-versa. De plus, si un ensemble est ouvert, ceci n'implique pas qu'il n'est pas fermé.

En effet, il y a des ensembles à la fois ouverts et fermés ($\emptyset, \mathbb{R}^n$ sont les seuls) et il y a des ensembles qui sont ni ouverts, ni fermés (y en a plein).

Exemple 2.6 (i) les boules ouvertes son ouvertes
(voir série 4)

(ii) Les boules fermées sont fermées. Soit donc, $a \in \mathbb{R}^n$ quelconque, $r > 0$ quelconque. Montrons que $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(a, r) = \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : d(a, x) \leq r\}$

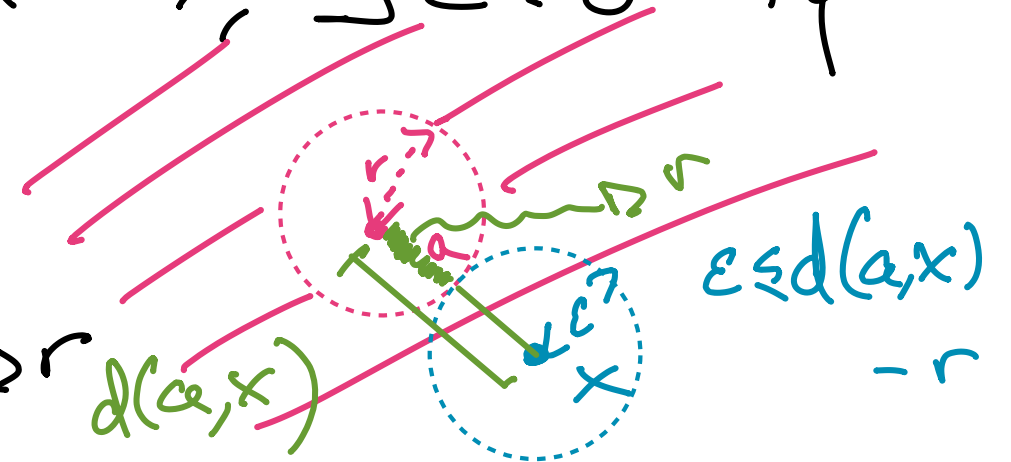
$$= \{x \in \mathbb{R}^n : \neg(d(a, x) \leq r)\} = \{x \in \mathbb{R}^n : d(a, x) > r\}.$$

is overh, i.e. $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(a, r), \exists \varepsilon > 0$ for

$$B(x, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(a, r)$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(a, r)$ que (comme d'habitude)

Posons $\varepsilon = d(a, x) - r$ $\begin{matrix} \downarrow \\ d(a, x) \geq r \\ \geq 0 \end{matrix}$



Montrons $B(x, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \underline{d(a, x)} > r\}$.

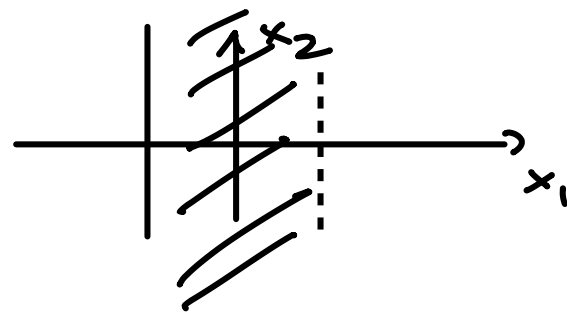
Soit donc $y \in B(x, \varepsilon)$

$$d(a, y) \geq |d(a, x) - d(x, y)| = d(a, x) - \underbrace{d(x, y)}$$

$$> d(a, x) - \varepsilon = d(a, x) - (d(a, x) - r) < \varepsilon$$

$$= r,$$

(iv) Soit l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R}^n : -1 \leq x_1 < 4\}$.



Montrons que E est ni ouvert ni fermé.

E n'est pas ouvert :

$\neg(E \text{ est ouvert})$

$\neg(\forall a \in E, \exists r > 0 \text{ tq } B(a, r) \subseteq E)$

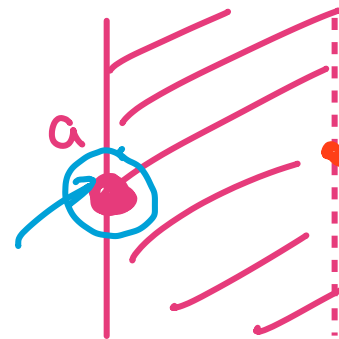
$\exists a \in E \text{ tq } \neg(\exists r > 0 \text{ tq } B(a, r) \subseteq E)$

$\exists a \in E \text{ tq } \forall r > 0, \neg(B(a, r) \subseteq E)$

$\exists a \in E \text{ tq } \forall r > 0, \neg(\forall x \in B(a, r), x \in E)$

$\exists a \in E \text{ tq } \forall r > 0, \exists x \in B(a, r) \text{ tq } \neg(x \in E)$

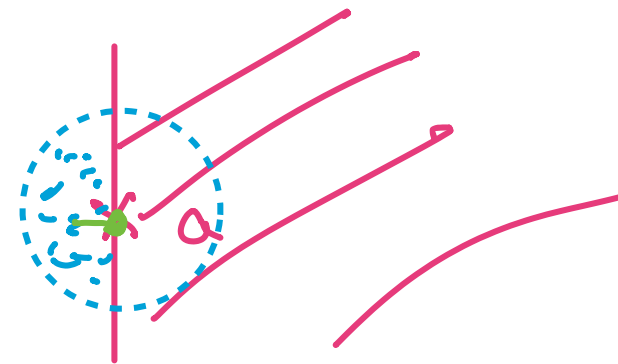
$\exists a \in E$ tq $\forall r > 0, \exists x \in B(a, r) \text{ tq } x \notin E.$



Soit $a = (-1, 0)$. Alors, $a_1 = -1$ vérifie $-1 \leq a_1 < 1$

$\Rightarrow a \in E$. Soit $r > 0$ quelconque.

Soit $x = (-1 - \frac{r}{2}, 0)$ Alors, $x_1 = -1 - \frac{r}{2} < -1$

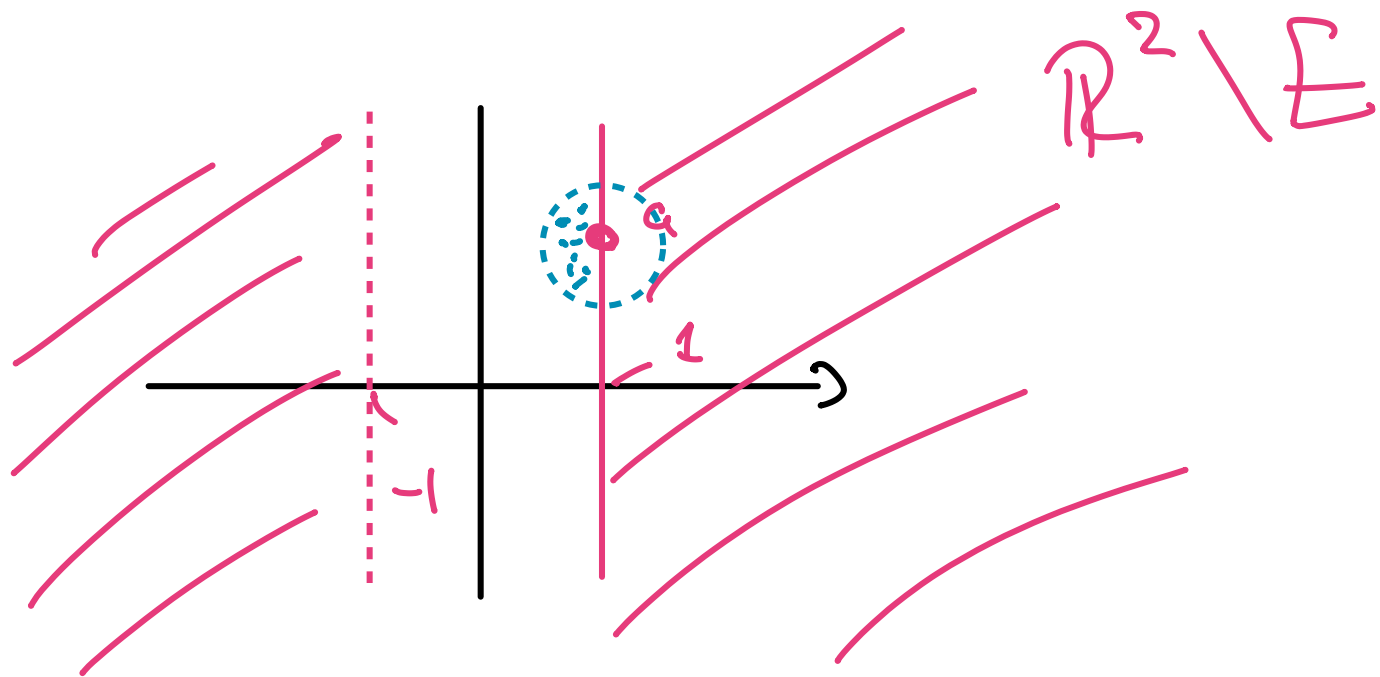


et donc, $x \notin E$. Par contre, $x \in B(a, r) = B((-1, 0), r)$

$$d(a, x) = \sqrt{|x_1 - a_1|^2 + |x_2 - a_2|^2} = \sqrt{\left| -1 - \frac{r}{2} + 1 \right|^2 + |0 - 0|^2} \\ = \frac{r}{2} < r \Rightarrow x \in B(a, r).$$

$\Rightarrow E^c$ est pas ouvert.

E^c est pas fermé: $\mathbb{R}^n \setminus E = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 < -1 \text{ ou } x_1 \geq 1\}$



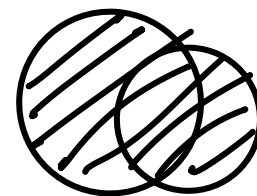
Proposition 2.8 :

- (i) Une union quelconque d'ouverts est ouverte
- (ii) Une intersection finie d'ouverts est ouverte.
- (iii) Une intersection quelconque de fermés est fermée
- (iv) Une union finie de fermés est fermée

Exemple 2.9 :

(i) Soit $E = \overline{B}((0,0), 2) \cup \overline{B}((0,0), 2)$ est un fermé

(ii) Soit pour $n \geq 1$ l'intervalle ouvert



$$I_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$$

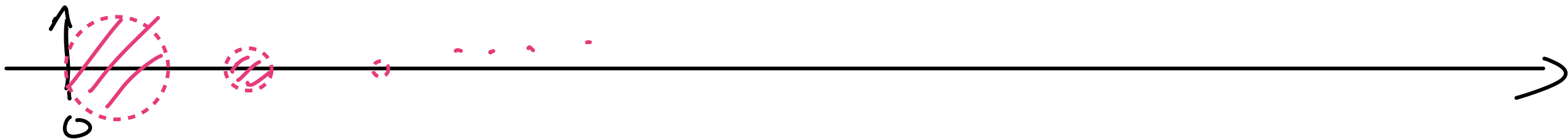
$$I = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x \in \mathbb{R} : \forall n, x \in I_n\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : \forall n, |x| < \frac{1}{n}\} = \{0\} \text{ n'est pas ouvert.}$$

(iii) pour $n \geq 1$, $B_n = B((1/2^n), \frac{1}{2^n}) \subseteq \mathbb{R}^2$

Alors,

$B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \{x \in \mathbb{R}^2 : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } x \in B_n\}$ est ouvert.



Remarque 2.10: Déterminer sur un dessin si un ensemble est ouvert ou fermé

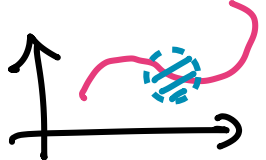
(i) si ^{toute} la frontière de l'ensemble est dans l'ensemble, (ligne pleine) l'ensemble est fermé

si la frontière de l'ensemble n'est jamais dans l'ensemble

l'ensemble est ouvert.

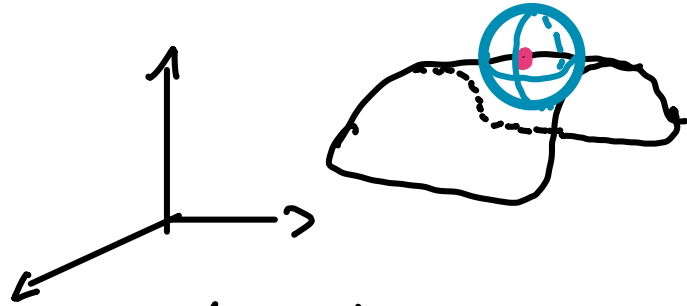
(ii) Pour $E \subset \mathbb{R}^n$, si il n'est pas de dimension pleine, il n'est pas ouvert.

Pour $n=1$, les ensembles de dimension pleine sont les intervalles. Les ensembles qui ne sont pas de dim. pleine sont les points.

Pour $n=2$, les ensembles de dimension pleine sont les patatoïdes , les ensembles qui ne sont pas de dimension pleine, sont les courbes et les points isolés 

Pour $n=3$, les ensembles de dimension pleine sont les volumes. Les ensembles qui ne sont pas de dimension

pleine sont les surfaces, les courbes et les points isolés.



- (iii) Souvent si toutes les conditions qui définissent l'ensemble sont des inégalités strictes ($<$, $>$, $\neq$) alors l'ensemble est ouvert
- (iv) Souvent si toutes les conditions qui définissent l'ensemble sont des inégalités larges ou des égalités ($\leq$, $\geq$, $=$) alors, l'ensemble est fermé.